**Преподавание математики в начальных классах вальдорфской школы**

В вальдорфской школе преподавание математики принято делить на три ступени. На первой ступени, охватывающей пять начальных классов, арифметика вырастает из области деятельности, очень тесно связанной с жизненными функциями ребёнка, а затем постепенно пополняется и расширяется изнутри наружу. На второй ступени, в классах с 6-го по 8-ой, в свои права вступает, прежде всего, практический аспект. Решение практических задач преподносится в виде жизненной науки, открывающей ученикам доступ к различным вещам. При этом стремятся, с одной стороны, к близости к жизни и актуальности, и, с другой стороны, - к показу основополагающих взаимосвязей. Переход к третьей ступени, начиная с 9-го класса, характеризуется привнесением рационалистической точки зрения.

Для учителей, работающих на основе антропософской педагогики, математика оказывается часто наиболее трудным предметом. Для одних препятствием оказываются привычки, заложенные в собственные школьные годы, для других не складываются в цельную картину многочисленные указания Р. Штайнера. Существующее многообразие подходов к преподаванию математики согласуется с общей философско-методологической базой воспитания и обучения в вальдорфской школе.

Сравнительный анализ учебного плана по математике традиционной и вальдорфской школы показывает, что в последней продвигаются значительно быстрее. К примеру, уже в первом классе вводятся четыре основные арифметические операции, причем одновременно. Программы традиционной школы общедоступны, учебный план по математике для первых - пятых классов вальдорфской школы будет приведен ниже. Поэтому учитель может сам убедиться в вышесказанном. Более важным является то, что подходы к преподаванию математики в традиционной и вальдорфской школах совершенно разные по сути. Основное отличие заключается в том, что традиционная школа даёт некий объём знаний, умений, навыков, поэтапно переходя от простого к сложному, зачастую "впихивая" в ученика учебный материал так, что учащийся не может соединиться со знаниями и становится сам учебным материалом. Учителя вальдорфской школы точно представляют себе, как преподносить знания семи-девяти-двенадцатилетнему ребёнку, чтобы они давали перспективу как на дальнейшее обучение, так и на будущую жизнь. Целью и исходным пунктом всего процесса обучения является, прежде всего, ученик, а не учебный материал. Поэтому в центр каждого урока всегда ставится человек, и всё связывается с ним.

Педагогика Р. Штайнера смотрит на ребёнка и видит, какие в нём живут способности и задатки, она помогает их здоровому и свободному развитию. Именно ребёнок (без слов, конечно) ставит учителю цель его деятельности. Вальдорфская педагогика вырабатывает у учащихся способности, и не только в области математики, но и в социальном плане.

Современное человечество, в общем-то, справедливо, гордится своим критическим мышлением. Оно является важной и ценной способностью человека, так как связано с неустанным поиском, "докапыванием" до истины. Человек, обладающий критическим мышлением, замечает все слабости и изъяны в людях, науке, искусстве, во всём окружающем мире. Но критическое мышление излишне придирчиво, а это ведёт зачастую к его узости и неконструктивности. Поэтому одну из главных своих задач вальдорфская педагогика видит в формировании у детей живого, созерцающего мышления, которое ищет гармонию в окружающем мире, воспринимает все явления и факты позитивно, правдиво, чутко, пластично, подвижно. Оно лишено избирательности фанатизма, назойливости, излишней фантазии. Принципы формирования живого, созерцающего мышления, которое включает в себя как составную часть и критическое мышление, заложены в обучении математике с 1 по 12 класс.

Математика в вальдорфской школе является одним из основных предметов, которые преподаются эпохами. Эпоха составляет 2-3 недели обучения, затем наступает перерыв 2-3 месяца, в течение которого дети изучают другие предметы. Такой подход к учебному процессу позволяет:

1. Организовать ритмическое обучение. Каждая эпоха является как бы вдохом, а перерыв — выдохом,

2. Максимально сконцентрироваться, сосредоточиться на изучаемом материале.

3. Быстро продвигаться в пределах эпохи. Дети в промежуток между двумя эпохами, естественно, всё или многое забывают. Но вальдорфская педагогика считает, что забывать не означает терять. Забывать - это значит перерабатывать и развивать дальше полученные знания в рамках душевного, подсознательно, пока ребёнок занят чем-то другим и, к примеру, не считает. Зато когда наступает эпоха счёта, то дети радуются: снова счёт! Они встречают его, как старого знакомого. Через 2-3 дня учащиеся снова погружаются в счёт, и видно, что они ничего не забыли.

Знания сами как бы "всплывают". Они будто бы отдыхали, спали, а теперь проснулись отдохнувшими и посвежевшими. Дети, которые имели проблемы со счётом в первую эпоху, в последующую - прекрасно с ними справляются. И это получается вроде бы "само по себе". Но, чтобы это произошло, учебный материал нужно давать "живым". Ведь мёртвое знание не может "взойти", оно может только потеряться.

Уроки математики в вальдорфской школе (как впрочем, и все другие) являются ареной воспитания. Логически и арифметика и принципы морали кажутся очень далёкими друг от друга. Тем не менее, ребёнок, обученный арифметике правильными методами, позднее в жизни будет всегда иметь чувство моральной ответственности. Для человеческого сознания переход от 1 к 2, к 3 и т. д. представляется совершенно произвольным. Р. Штайнер в Оксфордском курсе лекций говорил: "Несвойственно прикладывать один боб к другому и давать образующейся кучке бобов каждый раз новое название... Существует другой способ счета, который возник исторически. Люди всегда знали: всё, что мы видим в жизни, всегда составляет нечто целое, мы воспринимаем его как целое. Самые различные вещи могут составлять *единство.* Это целое и есть точка отсчёта. Числа и операции над ними в вальдорфской школе выводятся из некого единства. Каждое число воспринимается как органическое продолжение единства. Ребёнок привыкает к целостному восприятию вещей и сохраняет эту способность в жизни. Этот навык целостного восприятия оказывает удивительно глубокое влияние на душу и дух учеников. Привычка механически складывать отдельные единицы питает внутреннюю склонность души к жадности и зависти. Идя от целого к частям, мы ослабляем склонность к стяжательству и укрепляем то, что в благородном, платоновском смысле, можно назвать умеренностью, воздержанностью. Притяжение и отталкивание, симпатии и антипатии в области морали интимно связаны с характером первоначального соприкосновения ребёнка с миром чисел. Хотя, на первый взгляд, и нет связи между тем, как мы обращаемся с числами, и моральными импульсами, но то, что происходит в душе ребёнка, когда он этому учится, окажет огромное влияние на его восприятие великих моральных деяний, на весь его душевный мир, мир симпатий и антипатий, отношение к добру и злу". Если мы у ребёнка сформируем понятие числа, например, 3, как 1 + 1 + 1, то тем самым создадим в детском мышлении стремление к неподвижности. Совсем другое дело, если начать с трех и разделить его на части. Первый подход неизбежно ведёт к идее атомистического строения Вселенной. Второй - понятие целого до изучения его частей - это путь живого воображения, ведущий к пониманию того, что только целое даёт источник существования частей. Подтверждением этого может быть такая аналогия. Как бы не был "умудрен" жук, ползающий по стене кирпичного здания, и каким бы образом он не получал сведения *о* каждом кирпичике, который он "исследовал", того понятия "дом" которое есть у архитектора здания, он не получит.

Поскольку обращение с числом связано с определенной сухостью, то нужно чтобы интеллект не стремился лишь присваивать, захватывать, завоёвывать. Этому должны противостоять сердце и воля. Эгоизм сам собой проникает в расчёты, изменения, сравнения, Исподволь, подбирая соответствующие примеры, вальдорфский учитель вводит в обучение важные моральные принципы. Он никогда не спросит: "Сколько у тебя будет конфет, если ты получишь от Петра - две, от Кати - три?" Учитель сформулирует иначе: "Если ты дашь Петру две конфеты, а Кате - три, то сколько конфет ты подаришь?"

В вальдорфской школе нет ничего случайного, ничего не делается просто так, за всем стоит глубинный смысл. Содержание задач, которые дети решают на уроках, подаётся в виде математических историй, весьма поучительных. Эти мини-сюжеты всегда учитывают дифференцированный подход *к* детям с различными *темпераментами.* Свойственный педагогике Штайнера гомеопатический уход за темпераментами предполагает арифметику для всех типов темперамента, при этом противоположности темпераментов играют на уроках весьма существенную роль.

Уроки математики тесно связаны *с рисованием форм.* В первом классе рисование форм предшествует письму, до третьего класса оно преподаётся отдельными эпохами, а в четвёртом классе - в рамках других эпох. Впоследствии, в старших классах рисование форм переходит в геометрию. Вальдорфская педагогика придаёт большое значение гармоническому сочетанию противоположностей. *Метод полярностей* широко используется на уроках математики. Предпринятый флегматиком анализ подхватывается противоположным холерическим темпераментом и синтетически возвращается к целостности. При введении арифметических операций от сложения переходят к вычитанию, от умножения - к делению. После рисования прямых форм всегда рисуют округлые. При ритмических упражнениях всегда сочетают работу тела с внутренней работой, направленной на формирование представлений.

**Учебный план по математике для**

**первого класса**

**•** Преподавание арифметики всегда ведётся строго аналитически. Отталкиваясь от 1 как всеохватывающего единства, разделением вводятся первые числа (до 10). В записи используются наглядные римские цифры, менее абстрактные, чем арабские.

**•** Счёт в числовом пространстве от 1 до 100.

**•** Ритмические упражнения и освоение (вплоть до заучивания наизусть) таблицы умножения до 7.

**•** Введение четырёх основных арифметических операций в числовом пространстве до 20 и их запись.

**•** Начальные упражнения в устном счёте.

На самом первом уроке в вальдорфской школе с детьми говорят о том, зачем они туда пришли. Им рассказывают, какими различными навыками и способностями, которых детям недостаёт, обладают взрослые: умением писать, считать, говорить на иностранных языках и многим другим, что нужно в жизни.

После такого вступления начинается первая *эпоха рисования форм.* Дети рисуют два основных полярных элемента творения мира - "прямую" и "кривую" формы. В прямых линиях живёт целенаправленная, незыблемая сила, которая не отклоняется ни вправо, ни влево от заданного направления. Если она стремится вертикально вверх, в ней можно ощутить нравственную силу. Нисходящее и восходящее движение, сверху вниз и снизу вверх, противопоставлены друг другу как два полярных направления. Мы, люди, известным образом входим в понятие "вверх и вниз" между небом и землей.

В недели эпохи рисования форм дети упражняют чувство формы и подвижность руки и тем самым подготавливаются к письму. Во вторую эпоху вводятся первые буквы. Согласные предоставляют богатые возможности для переживания форм. Выводимые из мира природных образов, они хранят в себе нечто от самой жизни.

За этими двумя эпохами следует *Первая эпоха арифметики.* При описании содержания первых уроков математики использованы извлечения из книги Э. Шуберта.

#### Первый урок арифметики

Уроки по основным предметам обычно длятся 110 минут, с 8 ч. до 9ч.50м.

1. 8.00 - 8.10 - приветствие, утреннее изречение, ритмическая часть.

Ритмическая часть первого урока укорочена, так как в ходе урока придётся ещё работать ритмически с числами, и несоблюдение меры может слишком возбудить детей. На следующих уроках ритмическая работа с числами должна перекочёвывать в ритмическую часть.

2. 8.10 - 8.20 - беседа об арифметике. Учитель возвращается к мотиву первого урока. Он может рассказать детям о том, что их родителям приходится о многом позаботиться, чтобы в семье всё было благополучно. Родители получают зарплату, на которую можно купить разные вещи: хлеб, одежду, обувь и многое другое. Родители покупают не всё подряд и не всё, что им самим нужно. Они сперва обдумывают, что на самом деле требуется. Ведь им приходится платить за квартиру, отопление, воду, электричество и т.п. Дети могут сами продолжить эти перечисления. Родители должны о многом подумать. Они научились распределять деньги, чтобы иметь возможность платить за всё необходимое. О человеке, который умеет хорошо распределять, говорят он умеет *считать.* Учитель обязательно подчеркивает: тот, кто умеет хорошо распределять, всегда получает небольшой остаток и может что-нибудь подарить другим людям.

Эта вступительная беседа, которая не должна сильно затягиваться, затрагивает важный мотив всего преподавания арифметики. Если исходить из целого (в данном случае от дохода родителей), то арифметика разрабатывается и постигается как деление или распределение, внутренняя дифференциация. Данному подходу противостоит аддитивное наслаивание, аддитивное укрупнение.

3. 8.20 - 8.50 - введение первых чисел в виде римских цифр. После беседы с классом учитель берёт захваченную из дома палку, ломает её пополам и говорит: "Видите, я разломал эту палку на две части. Но с тобой, Аня, или с кем-то другим я не могу поступить также. Ты - целое, единое, **единство.** Для обозначения этого единства я использую такой знак: **I**. Так вводят число "один".

Это прямая первого урока эпохи рисования, но уже в новом качестве. Тогда она олицетворяла вертикаль, которую ребёнок выпрямляясь, прорисовал в пространстве в конце первого года своей жизни. Теперь (для ребёнка неосознанно) она указывает на объединяющую силу самосознания, на "Я", завоёванное им в выпрямлении и постепенно позволяющее ему как субъекту противопоставить себя объективному миру.

Затем учитель обращается к другому ребёнку: "Ты, как и всякий из нас, - единое целое. Однако не всё в тебе так просто: у тебя есть рука, она может потрогать и пощупать очень многое. Почти всё. Только с одной вещью она не может встретиться!" Дети, как правило, угадывают, что рука не может встретиться сама с собой. Такая же ситуация и с другими органами восприятия: здоровый глаз не видит себя, здоровое ухо не слышит себя. "Итак, ваша рука не может повстречать саму себя. Но рук ведь у вас две. И они уже могут встретиться. Они - **двойка.** Обозначим её так: **I I**.

Этим самым затрагивается важный момент в становлении человеческого сознания: парность некоторых органов при их здоровом взаимодействии. Это является предпосылкой нормального развития.

В разговоре возникают и другие двойки, рождающиеся из единого человеческого существа: два глаза, двое ушей, две ноги и т.д. Каждый парный орган имеет своё особенное значение для человеческого сознания и для его отношения к миру. Далее учитель показывает двойку не на природном, а на социальном плане. Он вызывает второго ребёнка и говорит: "Вот, вы вдвоём идёте и встречаетесь. Можете даже коснуться друг друга. Вы - двойка". Затем происходит совершенно свободное формирование двоек, когда силою человеческого мышления соединяют две вещи в одно целое (множество) и численно определяют его как двойку. Определяя два камня или два стула как двойку, мы не находим больше той живой внутренней связанности, которая присутствовала в руках, глазах или ногах. Мышлением постигается двоичность и там, где она дана чисто понятийно.

Переход к **тройке** может осуществляться простым добавлением: "Но может присоединиться и ещё один". Случай с руками здесь уже не проходит. При желании "три" можно ввести как структуру, то есть представить, например, семью из трех человек или подходящий цветок из трех лепестков. Так можно прийти к тройке **I I I.**

Переход к **четвёрке** можно осуществить, указав на животное: "Ты ведь видел соседскую собаку. Она что тоже на двух ногах?" Ребёнок убеждается, что в четырёх штрихах выражается устойчивость соседской собаки и, следовательно, учится из жизни строить число: **I I I I**.

Не страшно, что цифра "4" в римском ряду чаще пишется как **IV.** Она обозначалась и обозначается также и четырьмя штрихами. В случае пятёрки указывают на руку: "Вот рука. Она делится на пальцы. Вы уже можете сосчитать, что всего есть пять пальцев. Для пятёрки мы можем ввести знак руки **V.**

При этом показывают руку с четырьмя сведёнными пальцами и отстоящим большим.

От хода первого урока зависит, насколько далеко можно продвинуться в дальнейшем. Хотя и рекомендуется быстрое прохождение этого материала, но всё-таки детям дают возможность "переварить" материал.

4. 8.50 - 9.00 - запись чисел (знаков) в тетради.

Внизу оставляется место для написания арабских цифр.

5. 9.00 - 9.05 - маленькая пауза.

6. 9.05-9.25 — осознание чисел как ритмически-временных образований.

Счёт по одиночке и вместе.

Когда дети записали числа, учитель указывает ещё на один аспект числа, как временного образования. Он может сказать: "Двойку вам только что показали руки. Теперь послушайте, как можно её изобразить по-другому". Учитель начинает ритмически хлопать: U -, U -, U - ... Здесь (U -) - обозначение последовательности сильный - слабый или короткий - длинный хлопок.

Потом дети хлопают за ним. Затем показывается тройка: UU -, UU-,UU-...

Дети повторяют услышанное. Благодаря коротким и длинным, слабым и сильным хлопкам возникают ритмы, которые способствуют переживанию чисел два и три в этом упражнении. Здесь открывается ещё одна область, которая должна перейти в ритмическую часть следующих дней, эпох и лет, и математически подводит к удивительным рассмотрениям, которые в вальдорфской педагогике называют "ритмологическим счётом". Сюда относятся, например, тема цепных дробей и их связь с астрономическими ритмами, некоторые элементарные теоретико-числовые главы, что будет рассматриваться в старших классах.

В этих упражнениях сеются первые зёрна учения о ритмах, которое затем будет разрабатываться дальше. Многим детям ритмы поначалу даются трудно. Хорошим подспорьем поэтому являются детские стишки и игры, где ритм ещё связан с речью и музыкой. "Чистые" ритмы особо разрабатываются на уроках математики, куда они вносят музыкальный элемент.

После работы с числом переходят к счету, которым большинство детей владеет уверенно. На вопрос, кто может сосчитать до 20, руку поднимают почти все. Но это ещё не означает, что все сумеют это сделать. Поскольку учитель знает детей, то он вызывает "надежных" и просит посчитать вслух. Учитель следит, чтобы счёт заканчивался именно на двадцати, поскольку в ритмическом счете существует опасность гиперактивизации. Когда посчитали "отличники", учитель может выбрать и несколько слабых детей. Если дети в подготовительной группе или дома не упражнялись в счёте, то нередко ошибаются - перескакивают, переставляют числа. Учитель пока только указывает на неточности при счёте до 6 или 7. Эти ошибки могут быть симптомами скрытых математических проблем. Эта часть урока завершается общим счётом, тогда и слабым детям легче справиться, опираясь на группу.

7. 9.25 - 9.45 - сказка.

Содержание сказок первой эпохи математики должно быть "интимного", "камерного" характера, так как основной материал слишком возбуждает детей и побуждает их к чрезмерной активности. Спокойные сказки создают этому определенный противовес.

8. 9.45-9.50 - завтрак в классе.

#### Второй урок математики

*Ритмическая часть.* На второй день ритмическая часть имеет обычную длительность - 20-30 минут, центр тяжести при этом перемещается на работу с числами. Реальным опытом-фундаментом при формировании понятия числа и вообще элементарных математических понятий в вальдорфской школе является переживание движения и равновесия. Поэтому стараются по возможности с разных сторон связать числа с движением, чтобы число как бы "вытанцовывалось". При этом всегда имеют в виду два направления работы: соединение числа с телесным движением и углубление, внутренняя работа с переживанием движения. Первое служит формированию телесной моторики, углублению чувства собственного движения и равновесия, второе связано с жизнью представлений и соответствующей "внутренней" работой. В ритмической работе с числами всегда присутствуют эти две полярности. Начинают, как правило, с телесно-волевой деятельности, сопровождая числа всё новыми и новыми упражнениями - топаньем, хлопаньем, прыжками, речью и т.п. При этом упражняется тело, его ловкость. Переход к деятельности, родственной представлениям, создаётся тем, что движения делаются всё компактнее и компактнее. Вместо ног - работают пальцы, движения заменяются речью, выделяются отдельные части упражнения, чередуются группы детей: одним дают возможность послушать, а других активизируют общей поддержкой. В конце концов, тело приводят к полному покою. Переход от полюса воли к полюсу представлений совершается на каждом уроке, так же как он совершается в совокупном развитии ребёнка. Посредником между мышлением и волей выступает чувство, а значит ритм. Ребёнок, взрослея, всё больше переходит от моторного к понятийному обучению, поэтому и каждый урок должен "дышать" между полюсами воли и представлений. Окончание ритмической части всегда спокойное, концентрирующее. Учитель может нарисовать на доске круг или эллипс и под пристальным вниманием класса довести его до совершенства.

*Собственно учёба.* Учитель выписывает на доске пройденные числа и спрашивает детей об их значении. Дети в воздухе пишут римские цифры (I, II, III, IV, V). Учитель обращает внимание детей на то, что взрослые обычно пишут цифры не так и показывает написание арабских цифр. Учитель тщательно выписывает на доске цифру 1, дети прочерчивают её в воздухе. Затем кто-то из детей пишет её на доске, после чего учащиеся заносят её в тетрадь. Цифры 2 и 3 требуют особой тщательности из-за трудной формы и углов. Эти первые цифры записываются под римскими. Простого введения цифр мало. Необходимы упражнения, чтобы возникла необходимая достаточная моторная уверенность. Это делается и в классе, и дома. Учитель предлагает детям записать цифры столько раз, сколько они смогут, чтобы цифры стали красивыми. После эпохи рисования и эпохи букв детям это уже не так трудно. Очень важно, чтобы дети писали красиво и плавно, так как в этот момент привычки закладываются на всю жизнь.

Затем дети откладывают тетради и начинают "отгадывать" числа.

**На слух:** бьют в треугольник или в другие предметы и определяют число ударов. Можно извлекать музыкальные звуки, некоторые из которых повторяются. Нужно определить, сколько разных

**На ощупь:** ребёнка ставят перед классом и легонько дотрагиваются палочкой до головы, спины, колена. Или: просят отвернуться и дотрагиваются до пальцев. Или: завязывают глаза и просят пересчитать камешки.

**На ощупь и тепло:** достаточно большое число детей ходят по кругу и по очереди пожимают руку ребёнку с завязанными глазами. Определить, сколько детей в круге.

**На вкус и обоняние:** даются на пробу несколько вещей (хлеб, сыр, лимон и т.д.). Сколько всего?

**На взгляд:** на короткое мгновение показывают несколько пальцев или несколько оттенков цветов.

В вальдорфской школе избегают увязывать понятие числа с устойчивыми чувственными представлениями, например, со счётными палочками, когда число отождествляется с палочками определенной длины и цвета. Число само по себе может быть пережито, исходя из углубленного ощущения движения, всякая внешняя чувственная привязка чужда ему по существу. Вальдорфские педагоги стремятся к внутренней деятельности детей и к встрече с сущностью числа, поэтому для них не могут служить аргументом соображения удобства и легкости при объяснении.

После угадывания числа вводятся ещё некоторые упражнения на счёт, поскольку в ритмической части времени для этого, как правило, недостаточно.

Урок заканчивается сказкой.

Структура второго урока может служить моделью для всех остальных уроков. Вначале вводятся и закрепляются римские цифры до V. Дело здесь не в том, чтобы ввести соответствующие числа. Нормально развитый, готовый к школе ребёнок владеет ими и уверенно применяет. Содержанием учебы является способ их введения через процесс разложения и введения первых цифр.

Арабские цифры вводятся очень быстро. Написание цифр имеет такое же малое отношение к математической деятельности, как и произнесение числительных. Это своего рода договоренность, и она, естественно, должна возникнуть на первых уроках математики, поскольку без неё невозможно прийти к взаимопониманию и математической записи, однако ей не следует придавать излишнего значения и терять на введение цифр дорогого времени.

Вторая причина быстрого, неподкрепленного образным представлением, введения цифр заключается в природе числовых понятий, тяготеющей к музыкально-ритмическому. В антропософии считается, что числа имеют инспиративный, а не имагинативный (образный) характер, что учитывается в упражнениях, подчёркивающих ритмически-музыкальную сторону числа. Наконец, даже в основе определения количества пространственно - упорядоченных предметов лежит процесс движения.

#### Переход через десяток

Когда введены и закреплены римские и арабские цифры от 1 до 5, можно в том же духе вводить цифры от 6 до 10. Эта работа проходит в течение первой недели. Работая с римскими цифрами, к одной ладони (V) присоединяют вторую, что выражается знаком "Х". Арабские цифры и позиционная система счисления ставят проблему перехода через десяток. Разрешается она таким образом. Считают на пальцах до определенного момента, когда пальцы заканчиваются (а ведь раньше именно так и делали). Предметы связываются в пучок или складываются в мешок - это и есть десяток. Ноль в "10" как раз и обозначает упомянутый мешок. Два мешка дают 20, три - 30 и т.д. Если предметов больше десяти, то остаются лишние - одиннадцатый, двенадцатый. Ноль как бы знак "мешка" пишут только тогда, когда всё "влезло". Так приходят к записи 11, 12, 13...Если единицы подсчитывают отдельные предметы, то десятки - "сколько раз по десять". Аналогичным способом позднее вводятся сотни, тысячи и т.д.

#### Введение основных арифметических действий

При сложении двух чисел, например, 7+5 или 3+4, слагаемые имеют различные функции: первое слагаемое будет увеличиваться за счёт второго. Это можно пояснить на таком утрированном примере. Допустим, что у кого-то есть 1 млн. рублей, и он получает 1 рубль. В такой житейской ситуации легко себе представить разницу между двумя неидентичными процессами: 1+1000000 и 1000000+1. Равенство этих числовых выражений говорит лишь о совпадении конечных результатов, сами же процессы отличаются. Общая характеристика такого подхода к операции сложения может быть дана с использованием понятий "пассивно", "активно", "результат". Первое слагаемое, то есть число, которое увеличивается, является пассивным (p); второе слагаемое (a) активно увеличивает первое число. Если результат обозначить (r), то символически операцию *сложения* можно записать следующим образом.

p+a=r

Из трёх чисел могут быть заданны только два, следовательно, кроме суммы имеются ещё два процесса ("обращения"). Если заданы состояние p и результат r, то изменяющееся значение а можно определить следующим образом: p + ? = r, или r — p = a. Это так называемое пассивное обращение, или *образование разницы*. Вопросами, направленными на нахождение a, могут быть, например:

 - Даны числа r и p. Насколько они отличаются?

- Дано p. Сколько нужно добавить, чтобы получилось r? - Было r, осталось p. Сколько осталось?

Если известны r или а, то можно определить p, что является собственно *вычитанием,* или активным обращением: ? + а = r, или r - а = р. Соответствующими вопросами являются: - От r отнимаем а. Сколько осталось?

- К какому числу нужно прибавить а, чтобы получилось r?

При нахождении решений для обоих случаев дети будут мыслить по-разному, в зависимости от поставленного вопроса. Формально вычитание и образование разницы можно отождествить, так как при сложении обычных чисел результат не зависит от последовательности слагаемых (коммутативный закон, или переместительное свойство сложения). Однако в более сложных математических действиях, коммутативный закон имеет силу столь же редко, как и в жизни, где последовательность событий всегда важна.

От сложения в два шага можно перейти к *умножению.* Первый шаг - это рассмотрение суммы нескольких слагаемых: r = a + b + c + d +... Второй шаг - рассмотрение суммы одинаковых слагаемых как частного случая суммы нескольких слагаемых: г = р + р + р +...+ р.

Если мы задаём слагаемы р, число которых а, и рассматриваем величину г как величину, кратную величине р в а раз, то r = р х а или р х a=r.

Различие а и р особенно отчетливо, если р и r рассматривать в качестве именованной (размерной) величины, например: 12 м. = 3 м. + 3 м. + 3 м. + 3 м.

12м. =3 м. x 4

Число 4 указывает количество равных слагаемых, каждое из которых равно 3 м. Оно, в отличие от r и р, является безразмерной величиной. Коммутативность умножения относится к результату, но не к процессу умножения. Кпримеру, если есть три балки по 4 м (4 м х 3 = 12м и 3 м х 4 =12 м), то использоваться они будут по-разному.

В произведении р а = r а является активным, а р - пассивным сомножителем, а - это множитель, р - множимое.

Как и при сложении, так и при умножении, есть два подхода- обращения. Если заданы результат r и множимое р, то можно отыскать активный множитель который показывает, сколько раз р повторяется в г. Например, если у нас есть две длины, то можно определить, сколько раз меньшая длина входит в большую. То есть можно измерить большую длину, взяв в качестве единицы измерения меньшую. Их отношение даёт искомый результат. Определение а по известным r и р называется *измерением* или *образованием отношения:* р х ? = r, или r : р = а.

В случае, если r и р являются именованными величинами, то из двух однородных величин получаем безразмерную относительную величину.

Вопросы могут звучать следующим образом:

- Каково отношение r и р?

- Заданы целое r и часть р. Сколько раз нужно взять r, чтобы получилось р?

- Задано р. Несколько р составляют целое r. Сколько раз нужно взять р, чтобы получилось r?

Если заданы результат r и множитель а, то мы имеем дело с *делением -* активным обращением: целое нужно разделить на заданное число равных частей, после чего определить величину получившихся частей. В случае именованных величин исходное число r мы делим на безразмерное число а и получаем величину р, однородную исходной величине r : ?х а = r или r : а = р.

Вопросы при делении могут быть следующими:

- r разделяется на а равных частей. Сколько составляет одна часть?

* Какую исходную целую величину r получаем при умножении величины р на а?
* Формально можно снова отождествить деление и образование отношения, так как при умножении также имеет место коммутативный закон, и результат не зависит от того, что рассматривать в качестве множимого и множителя. Но, с точки зрения сути процесса, два действия обратных умножению, должны иметь формальные различия.

Обобщение вышесказанного относительно арифметических действий сведено в таблицу 1.

## Таблица 1

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Активноеобращение | Операция  | Пассивноеобращение |
| Вычитаниеr – a = pДелениеr : а = р | Сложениеp + а = rУмножениеp x a = r | Образованиеразницыr – р = аОбразованиеразницыr : р = а |

### Введение первого арифметического действия

При введении чисел исходили из дробления некоего целого. Этот аналитический процесс продолжается и при введении операций. Сначала определяются размеры некоего целостного множества, а затем рассматривают то же самое множество после дифференциации. Уже в первые дни эпохи можно обратиться к классу: "Смотрите, вот ладонь. Как получается пятерка? Из 4 или 1. Пятёрка, но разделенная на 4 и 1. 4 и 1 - это вместе снова 5". Пояснение сопровождается соответствующим движением пальцев. На пальцах же показывается, что та же самая пятёрка может быть, например, 1 и 2 и 2. Ведь 1 и 2 и 2 вместе - это *5.* Дети сами могут показывать и другие варианты пятерки. Так получается первая арифметическая операция - *аддитивное дробление, аддитивный анализ числа.* Синтез снова восстанавливает первоначальное число из частей. Такой раздробляющий (анализирующий) счёт выполняется с различными числами. Для письменного задания число записывается вверху, а внизу — его разные разложения.

7

1 5 1

3 4

2 3 2

1 2 1 2 1

Такое начало изучения математики, исходящее из целого, не означает, что человек всю жизнь будет так считать, важно, чтобы он начал так делать. Счёт в таком подходе похож на дерево, которое едино и которое расходится в корне на ветки. Если человек учится так считать, то он учится отдавать. Такой процесс - исходя из целого, определять части - имеет огромное значение для всей вальдорфской педагогики. Когда учитель ставит задачу на сложение: 7 + 3 =? или 2 + 9 =?, то всегда есть только один правильный ответ. Учитель должен только сравнить, насколько ответ ученика соответствует истинному решению. По существу происходит только контроль: "правильно - неправильно".

Совершенно иначе складывается отношение учителя и учеников и их общая работа, если вопрос ставится так: что такое 16? Ведь сколько верных ответов допускает этот вопрос! Вот некоторые:

16

8 8

4 4 4 4

3 4 2 4 3

15 11

12 4

 1 2 3 4 3 2 1 и т д.

Если заданное число достаточно велико, то учителю самому каждый раз предстоит решать маленькую задачу. Вместо простого "контролёра за правильностью", учитель превращается в основного вычислителя.

Такая постановка задачи учит ребёнка фундаментальной вещи: вопрос может, а порой и должен иметь много ответов. В ответе может быть заключён личный взгляд ребёнка, и существо ребёнка проявляет себя в таком ответе. Часто для класса некоторые ответы являются полной неожиданностью. Кто-то сознаётся, что никогда бы до такого не додумался. Но свободе выбора решения противостоит общая оценка. Человек свободен в индивидуально найденном решении, в личном видении. Но как только ответ произнесён, он может быть всему проверен на правильность.

Проблемы встают перед нами извне и изнутри. Почти всегда они требуют больше, чем просто ответа, поскольку каждый новый аспект вызывает новые решения. Представим себе чисто гипотетически, что собирается парламент, с таким образом методически выученными народными представителями, и они обсуждают, например, проблему безработицы. Вместо декларативных истин в последней инстанции, представляющих те или иные партийные мнения, взаимная требовательность диктует поиск и соединение всё новых и новых точек зрения: безработица среди молодёжи и стариков, занятость в среде предпринимателей, наёмных рабочих, женщин, инвалидов и т.д. К этому присоединяются экспертные оценки финансистов. Такая совместная работа препятствовала бы возникновению слишком "узких" мнений, продиктованных частными обстоятельствами каждого конкретного участника.

Известна такая стандартная манера рассуждения: "Но ведь соотношения таковы, каковы они есть. Что можно здесь изменить?" Дважды два - четыре, тут уж ничего не поделать!" Математика в глазах обывателя - синоним принуждения. Но если бы в кровь и плоть вошло, что как 2 + 2, так и 3 + 1, и 1 + 1 + 1 + 1 дают в ответе 4, математика подсознательно никогда бы не связывалась с насилием. Арифметика, идущая от целого, построенная на анализе, формирует глубокое чувство гармонии между индивидуальной свободой и общественным мнением.

Описанный методический момент можно увидеть и в более широкой перспективе. Как ответ на вопрос, где в мире можно найти *анализ и синтез,* в поле зрения вступают органическое и техническое развитие. Когда изготавливается технический объект, например автомобиль, сначала производят основные части, которые затем составляются в одно целое, синтезируются. Совершенно иначе протекают процессы формирования в мире жизни. Из относительно однородных первичных клеток в результате дифференциации возникает высокоразвитый организм. Функции вначале берёт на себя однородная субстанция. Позже выступают зачатки органов, на которые через некоторое время переносятся эти функции.

Свойство всякого аналитическо-органического развития взаимосвязь части с целым. Понять отдельный орган - почки, сердце - можно только исходя из целого. Это значит, что нужно развивать целостное, то есть идущее от целого к частям, мышление. Целостность должна стоять за всяким органическим познанием. В идеальном, нематериальном возникновении технического объекта - в мышлении изобретателя - протекает *тот* же процесс, который соответствует органическому становлению. Изобретение никогда не рождается из частностей, у истока - всегда идеальный смысл. Все необходимые дополнительные усовершенствования осуществляются затем под знаком целого. В случае глобального изобретения или открытия всегда проявляется именно целостное мышление, не обращающее внимания на практические детали.

Обе формы мышления имеют свою сферу приложения. Ориентация на целостно - аналитическое оправдана в современных условиях перед лицом явного доминирования аддитивно- синтетического подхода. Работая с этими двумя формами мышления, педагогика должна учитывать тот факт, что телесно ребёнок принадлежит к органическому миру, и первые сознательные шаги в учёбе приходятся на возраст, когда в его собственном теле завершается процесс дифференциации. В антропософской педагогике пытаются сперва примкнуть к органическим образующим процессам, а затем упражнять синтезирующее мышление, как своего рода рефлексию, или отражение.

#### Элементарные арифметические действия

После того, как, расчленяя "сосчитанное" целое, было введено сложение, и прозвучал мотив синтеза целого из частей, обе операции отрабатываются на разнообразных предметах: каштанах, гальке, деревяшках и т.п., собранных детьми на прогулке, Ставят естественные для детей задачи, рассказывают маленькие математические истории.

Начав с аналитического и синтетического сложения, довольно быстро переходят к другим операциям. Как введение в нахождение *разницы,* используют любимое детьми угадывание числа пальцев. Когда ребёнок отводит в сторону взгляд, берут его несколько пальцев и спрашивают: "Сколько?" Это является и очень хорошим упражнением для того, чтобы ввести сознание в пальцы. После первого вопроса задается второй: "А за сколько пальцев я не держусь?" Ребёнок может определить ответ тем же путём, что и в первом случае, но может исходить и из целого (общего числа пальцев): всего 10 пальцев. Держат, например, 6, значит не держат - 4.

Отыскание разницы (пассивное обращение) становится основной темой приблизительно на третьей неделе первой эпохи. Детям рассказывают, например, историю про ребёнка, посланного в магазин за яблоками. У него с собою 10 рублей. Яблоки стоят 4 рубля, и ребёнок получает, как положено, 6 рублей сдачи. Зажав в одной руке деньги, а в другой пакет с яблоками, он бежит домой. Вдруг он спотыкается и роняет несколько монет, в руке осталось только две, а остальные - в уличной пыли. Сколько же монет искать? Если этого не знаешь, то неясно, когда закончишь поиски, и, может быть, проищешь весь день. Ведь когда что-то потерял, то всегда хорошо знать, сколько потеряно, тогда и искать легче.

Настоящее *вычитание* (активное обращение) может быть дано вторым шагом, когда из 6 рублей потеряны 4 и остается 2. В первом случае по первоначальному (r, 6 р.) и новому (р, 2 р.) состоянию требуется найти изменившееся (а, 4 р.) состояние, то есть ищется разница между двумя состояниями в виде r х р = а. Во втором случае по целому (r, 6 р.) и потери (а, 4 р.) нужно определить новое (р, 2 р.) состояние как результат вычитания r х а = р.

Далее переходят к *измерению, или поиску отношения (умножение-деление).* Подготовка *к* этому начинается довольно рано, в ритмической части, при ритмическом счёте. Например, можно выделить каждое третье число, вытесняя промежуточные и так получить ряд чисел, кратных, например, трем: 1, 2, **3**, 4, 5, **6**,7, 8, **9**.... Когда проработка рядов достаточно подготовлена ритмически, то приступают к пространственному делению. На полу сооружается "ручей", поперёк которого лежат камни, например, 12 штук (исходное число должно содержать достаточное количество делителей). По камням можно прейти ручей за 12 шагов. Если делать

двойные шаги, то хватит и 6, а если тройные - 4. В этой задаче соотносятся две числовые характеристики "переправы": количество камней и размер шага. Получается отношение 12: 2 = 6. Стоящие слева числа - это - длины, измеренные в шагах между камнями. Стоящее справа "чистое" число - это отношение. Оно даёт отношение целого к размеру шага. Его определяют путём счёта, отвлекаясь от сравниваемых длин.

После таких упражнений переходят к множествам, то есть ещё определённее от пространственно-временного к пространственному. Кладут рядом несколько предметов и подсчитывают их количество. Затем отделяется подходящее множество и спрашивается, сколько таких подмножеств содержится в целом. Здесь сравниваются две однородные величины - два множества. Отношение - снова "чистое" число. К примеру, на столе лежат каштаны, дети их пересчитывают и получается, допустим, 12 штук. Учитель может взять 4 каштана и спросить: "Сколько раз 4 каштана содержится в 12 каштанах? Ответ: 3 раза.

Равномерному дроблению (делению) должны противопоставить синтетическое составление (умножение). Пусть, например, целое- 12, часть - 4. Тогда ответ на вопрос, сколько раз 4 содержится в 12, звучит: "трижды". Действуя синтетически можно сформулировать это так: трижды четыре даёт двенадцать. Очень важно - число, которое мы расчленяем, переструктурировать так, чтобы множимое и множитель поменялись местами. Например, если определено, что 12 = 2 х 6, то подразумевается перестройка: 12 = 6 х 2. В первом классе с ней справляются содержательно, без использования коммутативного закона.

Другая форма умножения может быть введена содержательным описанием произведения, данного через сомножители. Отправная точка целостного подхода здесь не в заданном числе, а в содержательной цели. Задача может звучать так: в каком (содержательно описанном) числе r заданное р содержится а раз? Например: "Накануне большого семейного праздника мама собирается печь сдобные булочки. Если на каждого человека будет достаточно двух булочек, то сколько же ей нужно испечь, ведь, кроме самой семьи, состоящей из 5 человек, будут ещё и 7 гостей?"

### Введение знаков арифметических действий

В отличие от не имеющего образности введения цифр, знаки арифметических действий (+, -, х, :) целесообразно вводить таким образом, чтобы в них просматривался остаток произведенного действия. Каждый вальдорфский учитель, имея свой стиль обучения и добиваясь соответствующего взаимодействия с классом, выбирает то, что подходит к определенно ситуации и, по возможности, создаёт радостную атмосферу, способствующую полюбить даже абстрактные символы.

Все четыре арифметические действия рассматриваются вместе. Так лучше видна связь между ними. Если сложение - это процесс накопления, то вычитание - это обратный процесс. То же самое относится к умножению и делению, то есть сложение-вычитание и умножение-деление - это полярные действия. Арифметические операции вводятся образно, например, говорят, что это четыре брата. Сложение - "садовник", симпатичные человек в красивом фартуке. Он посадил много овощей, капусту, помидору, огурцы. Вырастил их и теперь складывает в погреб: 10 кочанов капусты, 25 огурцов и т. д. Знак "+" напоминает ребёнку о соединении чисел. У "садовника" есть брат - "булочник", румяный, добродушный толстяк. Он очень рано встаёт и печёт замечательные булочки, вкусный запах которых слышат его соседи. Они спешат к нему, чтобы приобрести булочки на завтрак. "Булочник" с удовольствием раздаёт их: кому - одну, кому - две, а кому - пять или даже семь. Образ этого брата может быть совсем другим. Возможно, что это "пастух". Он худ и мрачен, у него длинное лицо и длинный нос. Он пасёт в горах овец и всё время их теряет. Вот у него осталась всего лишь одна овца. Грустно опираясь на палку, он плачет, и у его ног образуется озеро. Дети зарисовывают озеро и ставят знак (вычитание). Третий брат - "волшебник", Он всегда всем доволен, красиво одет в жёлтое, на рукавах и брюках у него красные полоски. Он много шутит и смеётся. У него есть волшебная палочка, взмахивая которой, он выбрасывает числа: то 2, то 40, то 80. Это умножение (х). Четвёртый брат - "король". Он справедлив, поэтому всё распределяет по справедливости и рукой показывает, что кому принадлежит. Это деление (:).

#### Введение начальной таблицы сложения

Как мы видели раньше, уже в первую неделю первой эпохи ребёнок учится складывать. Исходя из целого, он производит аддитивное дробление и затем синтетически соединяет слагаемые. Если, например, работают с числом 7, то на доске и в тетради ещё до введения операции сложения появляется запись:

7

6 1

5 2

4 3

3 4

2 5

1 6

С этой таблицей упражняются до тех пор, пока у детей не появляется уверенность. Затем одну из колонок закрывают. Учитель показывает на то или иное число, а дети называют дополнительные слагаемые.

Смышленые дети могут называть несколько слагаемых, дополняющих до целого. Но в данном случае учитель подчеркивает разложение именно на два слагаемые. Затем можно перейти к следующим двум группам упражнений. Если работают над прибавлением двух, то учитель просит разлагать числа так, чтобы второе слагаемое было двойкой. Учитель говорит "5", а дети показывают решение: 5 = 3 + 2. Через некоторое время дети могут называть только первое неизвестное слагаемое (в данном случае - 3). Другая группа синтетических упражнений связана со сложением двойки с названным числом. Учитель называет "5". Дети дают решение: *5* + 2 = 7.

При введении первого упражнения учитель может сказать: "У нас всегда прибавлено 2. Я задумал число, к нему прибавил 2. Вы должны сказать, какое число я задумал". Учитель называет, к примеру, "7", а дети отвечают "5". Во втором случае можно сказать: "Теперь прибавляйте к называемому мной числу всё время 2". Он называет "4", дети говорят "б". Ученики могут и сами "задавать" задачи. Важно, чтобы в конце концов не требовалось никакого счёта, и результат сложения назывался бы по памяти.

### Введение начальной таблицы умножения

Таблица умножения строится из ритмической работы с числами. С первых уроков начинают делать ударение голосом и сопровождать его шагами и другими движениями, ритмически оформляя числовой ряд, подчеркивая каждое второе или каждое третье число. Отсюда возникает таблица умножения на 2 или 3. Для прочного освоения требуется не просто проговорить её, но и развить определенную подвижность представлений. Обычный хор или громкий счёт отдельного ребёнка не достаточны. Упомянутую подвижность можно выработать следующими упражнениями.

⮚ хоровое произнесение числового ряда, например, 2, 4, 6,... вперед и назад.

⮚ класс делится на две группы, называющие числа подряд.

⮚ класс делится на две или большее число групп. Учитель указывает в произвольном порядке на группу, называющую следующее число.

⮚ класс произносит числовой ряд. По знаку учителя дети останавливаются. Кто-нибудь из детей должен назвать следующее или предшествующее число.

Упражнения такого рода делаются некоторыми детьми перед классом. Например, группа детей моет встать в круг. Маленький мячик перебрасывается от одного ребёнка к другому. Бросающий произносит очередное число, ловящий должен сказать следующее по таблице умножения.

Если ритмическая речь быстро осваивается через ритмическую память, то нерегулярной речью активируется мыслительная деятельность. Ритмическая речь тяготеет к подсознательному. Такая сознательная пробужденность является важной педагогической целью как раз уроков математики. В этом их отличие от занятий искусством - пением, живописью и т.д., где прерывание творческого потока вредит детскому переживанию. Недостаточные математические успехи класса часто можно объяснить недостаточной пробужденностью детей - их слишком слабой познавательной деятельностью - и недостаточным вниманием к достижениям отдельных учеников. Когда введено умножение, таблицу можно записать и выучить, пользуясь упражнениями с шагами. Например, ребёнок перед классом "вышагивает" таблицу умножения на 3:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Ребёнок называет: | Показывает число шагов: | Класс хором считает: |
| 3 | 1 | 3 это 1 х 3 |
| 6 | 2 | 6 это 2 х 3 |
| 9 | 3 | 9 это 3 х 3 |

 Задачами этого этапа являются достаточно большое и проработанное числовое пространство, владение рядами кратных чисел. Как только это достигнуто, не следует медлить. Нужно энергично учить дальше. Р. Штайнер говорил о том, что не нужно боятся нагружать память ребёнка в возрасте 7 - 14 лет. Нужно на нескольких примерах показать необходимые законы умножения, а таблицу он без труда выучит на память.

Как и в случае числовых рядов, важно не только ритмически овладеть таблицей умножения, но и, твёрдо опираясь на память, знать её и в разбивку.

Оформление таблицы умножения детьми в тетрадях - это творческий, эстетический процесс. Учитель может предложить: "Давайте построим мост с цифрами, по которому скачет лошадка. Она перепрыгивает на числа: 3 х 1 = 3, 3 х 2 = 6, 3 x 3 =9, 3 х 4= 12 ... В этом месте лошадка делает большой прыжок, так как нужно перескочить через десяток". Возникают красивые рисунки, и ребёнок воспринимает цифровые закономерности. Таблицу можно изобразить и в круге. В тетрадях возникают "цветы" для умножения и деления, которые показывают наглядно непосредственную связь между арифметическими действиями; забавные рисунки, показывающие удвоение и деление пополам.

#### Общая структура преподавания математики

**в первом классе**

Обычно для преподавания математики в первом классе имеется, как правило, 12 недель, что даёт возможность длиться каждой эпохе по четыре недели. Зимнее время считается наиболее подходящим для математики, поэтому эпохи распределяются на позднюю осень, зиму и время Пасхи. В конце учебного года ещё раз всё вспоминаёт в части, отведенной для повторения. Некоторые учителя повторяют счёт в ритмической части других эпох.

Распределение учебного материала определяется конкретной ситуацией в классе, связанной со способностями детей. Но в целом в первую эпоху темы даются достаточно расплывчато. Важными являются процесс введения чисел и арифметических действий, уверенность в счете, записывании чисел. Числа должны с помощью ритмических упражнений становится переживанием в движении. Простые письменные вычисления проводятся без знаков арифметических действий. Учитель должен как можно быстрее распознать имеющиеся отставания и скорректировать их посредством ритмических упражнений на понимание чисел.

Вторая эпоха может уже более четко подвести к осознанию характера отдельных арифметических операций. Они называются, и вводятся их знаки. Это становится возможным, если первая эпоха была занята математической деятельностью, и не терялось время на неэкономическое введение цифр. Вначале прорабатывается начальная таблица сложения, а разработка числовых рядов готовит малую таблицу умножения. Счёт и запись чисел можно расширить приблизительно до 120. Третья эпоха продолжает начатое ранее, центральным её моментом становится введение начальной таблицы умножения. Дети должны иметь четкое представление о порядке чисел с помощью постоянных тренировок в ритмическом счёте, а также уметь внутреннее обозревать числовое пространство в области первых десятков.

В целом в течение первого учебного года закладывается много зёрен, которые дадут плоды лишь во втором классе. Поэтому надо спокойно уметь ждать, пока разные дети усвоят пройденный материал и разовьют способности в математике. Именно в математике, как и в музыке, способности чрезвычайно различны, и то, чему одного ребёнка вряд ли надо учить, другим ребёнком усваивается довольно медленно. Очень важно, чтобы при этом не развился страх не справиться с заданиями, так как это может привести к тяжёлым нарушениям, которые в течение всей жизни будут тормозить развитие математических способностей.

**Учебный план по математике для**

**второго класса**

Первые три года обучения носят достаточно однородный характер в силу специфики данного возрастного периода. Поэтому изменения в программе, как правило, незначительные и связаны лишь с самим учебным материалом, а не способом его подачи. Методы преподавания и требования к ним остаются теми же.

Продолжаются упражнения в четырёх арифметических действиях с более крупными числами (в диапазоне от **1** до **100,** и с переходом через **100**), причём необходимо, чтобы ребёнок как можно больше вычислял в уме. Не надо бояться упражнений на память, ибо как раз для развития памяти можно сделать многое при разумном обучении устному счёту. Именно этот возраст является сензитивным как для развития и укрепления *памяти*, так и для общих *вычислительных способностей*.

 С этой же целью ученики разучивают на память таблицу умножения; предварительно принципиально объясняют и делают для них понятным понятие умножения. Таблицу умножения на **1 - 12** разучивают наизусть на основе **ритмической** памяти. Процесс обучения облегчается ритмическим упражнениями (хлопки, удары ногами, ритмичное проговаривание и проч.). Во **2-м** классе помимо ритмического варианта используется также вариант “в разбивку” (“**3х7** - это?” или “что такое **35**?”).

 Работа с *таблицей умножения* предполагает поиск *числовых закономерностей* (с возможной записью), что служит основой для выведения в **3-м** классе *правил умножения и деления*.

 Вводится представление о **соотношении** чисел: *больше, меньше, равно*.

 *Художественный (образный)* способ обучения применяется при письменной записи арифметических действий и решения задач. Как и в первом классе, условия задачи носят *конкретно-образный* и *предметный* характер.

# Рисование форм

Усложняются упражнения в *симметрии (в осевой и центральной)*; понятие “симметрии” не вводится. Затем переходят к упражнениям с наклонной осью, с двумя взаимно перпендикулярными осями.

 С помощью ритмически продвигающихся, продолжающихся или изменяющихся форм создаётся основа для развития в дальнейшем **чистописания** (узоры и формы становятся меньше по размеру, приближаясь к традиционному написанию).

 Используются упражнения на *превращение (метаморфозу)* угловатых форм в криволинейные и наоборот.

**Учебный план по математике для**

**третьего класса**

*В возрасте около* ***9****-****10*** *лет, как об этом уже говорилось, происходят существенные изменения в сознании детей. Ребёнок начинает вычленять себя, своё "Я" из окружающего мира и понимать его более* ***объективно****. Ученик 3-го класса уже сознательно ищет авторитет в своих учителях. Поэтому содержание преподавания в третьем классе основывается на создании нового соотношения между ребёнком и окружающим его миром.*

 Упражняются в счёте в уме, используя для этого более сложный учебный материал. Продолжается работа с таблицей умножения (на **13** и далее).

 Учатся *мерам длины, веса, объёма, времени, денег*. Понимание *измерения* достигается путём сопоставления окружающих вещей с **собственным** масштабом (*сажень, пядь, дюйм, локоть* и т.п.), что исторически является более ранним и более естественным для детей - соотнесение пространственных размеров с размерами и пропорциями своего тела. Затем постепенно продвигаются к *современной системе мер*. При преподавании мер веса и мер объёма необходимо сохранить у ребёнка их живое ощущение. Это достигается путём заданий по изготовлению самостоятельно каждым ребёнком, например, сосудов определённой вместимости или путём взвешивания разных вещей руками.

 **Десятичная система** выводится конкретно через группировку вещей и предметов. Создаётся представление о *разрядах* и *классах чисел* (в пределах **1 000 000**). От образного постижения чисел и выражений переходят к их абстрактному выражению и традиционной записи.

 Простые арифметические задачи с проверкой их решения реализуются с помощью **практических** арифметических примеров, сначала в виде рисунков. Активно используются прикладные задачи со старыми мерами, что требует от учеников большей гибкости ума и сообразительности, нежели в примерах с десятичной системой исчисления.

 **Письменные вычисления**:

1. *письменное сложение и вычитание многозначных чисел;*
2. *письменное умножение на двузначное число;*
3. *письменное деление на однозначное число*.

 На практических примерах и в связи с различными мерами даётся предварительное представление о **долях**.

# Рисование форм

Упражняются свободной рукой в четырёхгранном **симметричном** рисовании по вертикальной и горизонтальной осям, а также в  **формоизменениях** (например, к ломаной внутренней форме ищется внешний “криволинейный” ответ). Поиск новых отношений с миром опосредованно отражается в заданиях на *дополнительные формы* (соответствие внешней формы внутренней и наоборот).

**Учебный план по математике для**

**четвертого класса**

Дети в **4**-ом классе учатся выполнять следующие письменные вычисления:

1. *умножение с многозначными множителями*;
2. *деление с многозначными делителями*.

 Усваиваются понятия **"дроби"** и **"десятичной дроби",** их обозначение, а также:

1. *устный счёт с дробями;*
2. *сравнение дробей;*
3. *умножение дроби на число и на дробь;*
4. *деление числа на дробь и дроби на дробь;*
5. *сложение дробей;*
6. *сокращение дробей (на основе нетрадиционных признаков делимости);*
7. *расширение дробей.*

 Как и в предыдущие годы, учение о дробях и десятичных дробях, упражнения по сокращению, расширению, превращению дробей и выполнению арифметических действий с ними, а также различные задачи должны придерживаться *конкретно-описательного характера*, строиться на конкретной основе. Это значит не только оперирование предметами, но и включение их в определённые *социальные ситуации*.

# Рисование форм

Учатся рисовать предметы по образцу, узловые фигуры и орнаменты, начинают упражняться ***геометрическому рисованию***. В течение года орнаменты становятся всё более и более сложными (увеличивается количество переплетений и углов). Новое здесь - отношение *“над-под”,* что требует от детей высокой степени пробуждённости сознания и концентрация внимания. Это создаёт предпосылки для хорошей ориентации не только на *плоскости*, но и в *пространстве*.

 *Геометрическим рисованием* (например, параллельные прямые, главная нормаль прямой, прямоугольный треугольник, круг, в котором дополняется круг и наоборот ...) развивается способность к восприятию уже знакомых форм и свободному владению ими. Упражнения уже не выводятся непосредственно из движений, как это было в предыдущих классах, а из образца или представления.

 Продолжаются и усложняются упражнения в *формоизменении и симметрии*.

### Арифметика и темпераменты

В вальдорфской педагогике большое значение придается работе с темпераментами.

Как прекрасный пример возможности учёта темпераментов учащихся, рассмотрим арифметическую историю, которую учитель рассказывает в первом классе [7].

"Крестьянин приготовил большую головку сыра. Разрезал её на десять частей. Три части он ещё раньше пообещал отдать соседям, а одной должен был поужинать сам. Сколько частей ему можно продать на рынке?" Такой вопрос можно задать меланхоликам, любящим порядок и умеющим тщательно планировать.

"На рыночной площади большая толчея. Четверо полных энергичных дам протиснулись к прилавку и купили у крестьянина по одному куску сыра". К этому времени дети холерического склада начали шалить, и учитель должен подобрать вопрос, который бы их заинтересовал. "По забавному стечению обстоятельств, у каждой из дам было по четыре ребёнка и по мужу, и все члены их семей были непрочь полакомиться сыром. Итак, сколько же всего людей, которые хотели отведать сыра, оказалось в четырех семьях".

Сутолока на рынке тем временем становилась оживленнее. Какой-то голодный парень украл у крестьянина один кусок, а другой стащила собака мясника. Некоторое время спустя, нечистая совесть заставила парня вернуть украденное. Крестьянин же, преисполненный добродушия, поделился с ним своим куском. Однако собака убежала - свой кусок сыра она съела сама. Сколько теперь кусков осталось у крестьянина?" В этом месте задают вопрос, привлекающий сангвиников, потому что речь идёт о толкотне и *круговороте* событий на рынке.

"Затем настаёт момент, когда пора подумать обо всех, кому удалось отведать замечательного сыра. Сколько же их оказалось?" Сейчас решением задачи - сложением - могут некоторое время позаниматься и флегматики, испытывающие интерес к приятной пище.

Э. Шуберт предлагает следующие методы работы на уроках математики с детьми противоположных темпераментов: холерик - флегматик, сангвиник - меланхолик.

**Арифметика для флегматичного темперамента**

Главные задачи, которые ставит вальдорфский учитель перед флегматиком, это работа с целостным множеством, определение количества однородных предметов, соединенных в нём, аддитивное дробление множества. Сведение в одно целое и внутренний анализ является на различных уровнях внутренним жестом флегматического темперамента. Телесно он стоит под знаком обмена веществ. А ведь пищеварение - это ничто иное, как непрерывный анализ принятой пищи. Пищеварение - это разлагающее "рассмотрение" субстанций. Оно совершается, благодаря бессознательно действующими процессами обмена веществ, тогда как мыслительный анализ обусловлен формирующим представления сознанием.

В душевном отношении флегматик ищет гармонии в созвучии с другими людьми. Принадлежность к группе или исключенность из неё играют для него существенную роль. Это важно учитывать при формировании работающей группы. Внутренняя организованность и гармоническое созвучие сил требуют флегматических задатков. Синтетическое соединение аналитически полученных частей требует сознательного волевого участия. Здесь решающими становятся холерические струны души. Поэтому на уроке предпринятый флегматиком анализ подхватывается противоположным темпераментом и синтетически возвращается к целостности.

**Арифметики для меланхолического темперамента**

Детям меланхоликам ставят задачу найти разницу, исходя из целого и остатка, то есть вычислить активно изменяющееся состояние. Это соединяется с душевным самопереживанием меланхолического темперамента. Он склонен переживать себя в своём отличии от мира. Прежде всего, он осознаёт, сколь далеко он от идеала. Идеальный образ и ощущение своей неполноценности обращают его внимание на те способности других людей, которыми он не обладает. Подобные переживания, конечно, присутствуют и в жизни другого человека. Меланхолическая окраска проявляется в том, как они соотносятся с самооценкой и с идеалом. Этот процесс не стоит путать с депрессивным настроением. Для внутреннее деятельного меланхолика он часто служит побуждением напрячься и развить собственные способности.

После того, как ребёнок меланхолического склада отыскал разницу, просят сангвиника решить ту же задачу как активное вычитание. То есть задача, поставленная меланхолику в виде r х р = а, ставится сангвинику наоборот, в виде r - а = р.

**Арифметика для сангвинического темперамента**

В задачах для сангвиника подчеркивается прежде всего дыхательно - ритмическое. Из всех арифметических операций наиболее подходящим является нахождение отношений, строящихся на умножении. Ребёнок-сангвиник развернут к своему окружению. Он ищет событий. Не столько сами вещи, сколько то, что может возникнуть в связи с ними как процесс, пробуждает его интерес.

При сравнении именованных величин единицы измерения исчезают, и возникает "чистое" отношение. Поэтому две длины могут относиться друг к другу, как и два веса. Это освобождение от непосредственной предметной данности сродни сангвинику. Легкость и подвижность его душевных движений связаны с этой возможностью оторваться от грубой предметности. Иначе жизнерадостность исчезает, и облачная завеса опускается на душу.

Противоположный темперамент должен подхватить и преобразовать вычисление. Оно должно быть переструктурировано - множитель и множимое нужно поменять местами. Если сангвинику было предложено r вещей, из них отделено р, и требуется найти множитель а, то теперь отделяется а, и требуется найти множитель р. Формально это вытекает из закона коммутативности. Но если даны предметы, то качество множителя и множимого непосредственно переживаемы. Для ребёнка это существенный шаг - заново и по-другому переупорядочить уже упорядоченное. Поменять местами сомножители - такое переструктурирование требует внутренней активности и подвижности, которая меланхолическому темпераменту, с одной стороны, больше других присуща, с другой - особенно необходима, поскольку он склонен держаться однажды добытых представлений.

**Арифметика для холерического темперамента**

В позитивном смысле холерический темперамент проявляется как инициативный и деятельный тип, действующий, исходя из уверенного самосознания и доверия к себе. Это доверие и самосознание, впрочем, могут привести к переоценке собственных возможностей. Работая на уроках математики с холерическим темпераментом, следует вначале ставить перед сознанием ребёнка ситуацию в целом. Целое в содержательном плане, а не количественном. Оно обладает множеством функций, взаимодействие которых пока недостаточно просматривается. В арифметике этому соответствует случай, когда произведение r содержательно описано, но определено только через сомножители (р и а). Вопрос ставится, в каком числе г число р содержится а раз?

Решенную задачу передают противоположному флегматичному темпераменту, преобразуя её в обычное деление: число r, разделенное на а частей, приводит к части р.

Для холерика существует особенно подходящее упражнение, требующее верной оценки ситуации: пройти заданный участок пути заданным числом одинаковых шагов. Здесь с первого шага необходимо соблюдать меру.

Связи между арифметическими действиями и темпераментами в таблице 2. 

## Таблица 2

|  |  |
| --- | --- |
| СЛОЖЕНИЕр+а=г | Флегматик. Аддитивное аналитическое членение числа: "Что такое r?" Или: "Как ты можешь представить r?" r = а + b + ...Холерик. Активное синтетическое сложение. a + b + … = r |
| ВЫЧИТАНИЕr-а=рСангвиник. Активное вычитание: "Если от r отнять а, то останется р".r x a = p | ОБРАЗОВАНИЕ РАЗНИЦЫ r – р = аМеланхолик. Исходя из целого r и остатка р определить а (активно изменившееся состояние). Или: "Было r, осталось р. Что потеряно?"r x p = a |
| УМНОЖЕНИЕр x a = r | Холерик. Определение числа из его мультипликативного расчленения: "В каком числе r содержится р а раз?" r = p x a |
| ДЕЛЕНИЕr : а = рФлегматик. Активное деление: Если r разделено на а частей, то получим части величины р": r : а=р | ОБРАЗОВАНИЕ ОТНОШЕНИЯ r : р = аСангвиник. Исходя из целого r и части р, определить, сколько раз в целом r содержится часть р: r:р= а |

Благодаря такой душевной окраске арифметических операций, наряду с навыком подвижного обращения с числами, воспитывается внимание детей друг к другу, а особенно к противоположным темпераментам. Давая арифметику таким образом, учитель развивает у детей высокую внутреннюю активность. Это требует, конечно, известного усилия, которое даётся порой легче, чем можно это предположить. Операции приобретают окраску - душевную окраску для детей. Она играет не последнюю роль при выборе нужного действия в конкретной ситуации. Нет и не может быть правила, кроме определенных типов задач, когда и какое действие применять. Выбор должен происходить интуитивно. В арифметике он осуществляется правильно, если наряду со способностью ясного понятийного анализа проблемы, сами действия переживаются достаточно дифференцированно.